ISSN 1887-1771
http://www.relafare.eu
Benito Buide, julio de 2006

La escala de los armónicos.

Artículo publicado el martes, 11 de julio de 2006
por Benito Buide

A partir de la serie armónica de un sonido se puede obtener una escala musical con interesantes implicaciones para la afinación de un conjunto de instrumentos o voces.

1.- La serie armónica:

Existe una escala musical en la cual las relaciones entre las frecuencias de sus notas están basadas en la serie armónica.

En primer lugar, trataré de explicar en qué consiste la serie armónica de un sonido.

El **teorema de Fourier** afirma que cualquier función matemática puede ser descompuesta en una suma discreta de infinitas funciones sinusoidales elementales:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot sen(n \cdot x)$$

Tenemos que partir del hecho de que los sonidos musicales pueden ser representados por funciones matemáticas. Lo que representan dichas funciones son las variaciones de presión del aire en función del espacio o del tiempo. Aplicando el teorema de Fourier a un sonido concluímos que cualquier sonido musical puede ser descompuesto en sonidos elementales, llamados **armónicos**:

El teorema de Fourier lo podemos escribir de manera desarrollada como:

$$f(x) = A_1 \cdot sen(x) + A_2 \cdot sen(2 \cdot x) + A_3 \cdot sen(3 \cdot x) + A_4 \cdot sen(4 \cdot x) + \cdots$$

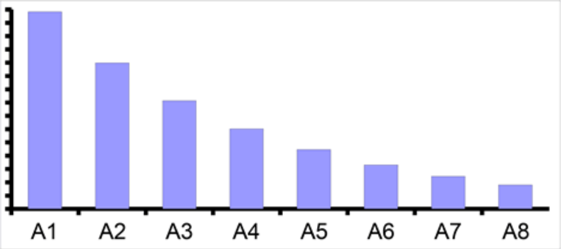
En la mayor parte de los sonidos musicales las amplitudes *An* van disminuyendo a medida que *n* crece. Es decir, los armónicos superiores se escucharán menos que los inferiores:

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \cdots$$

Las frecuencias de los armónicos, por el propio enunciado del teorema de Fourier, van aumentando según la serie de los números enteros positivos. El segundo armónico tendrá frecuencia doble que el primero, el tercero triple que el primero, etc. Es interesante por sus implicaciones musicales pensar en las relaciones de frecuencias entre dos armónicos; por ejemplo, entre el 7º y el 4º la relación será de 7/4.

No se trata sólamente de una argucia matemática. Resulta que nuestro oído está preparado fisiológicamente hablando para percibir el sonido global como una serie de armónicos. En realidad, los procesos que tienen lugar en el caracol, en el oído interno, son equivalentes a un análisis armónico del sonido que entra en el oído (lo que se denomina un análisis espectral). Realmente, cuando escuchamos un sonido musical, lo que escuchamos es un montón de sonidos superpuestos. El que escuchamos con más intensidad es el armónico número uno o sonido fundamental. Este hecho probablemente haya sido intuido por científicos como Mersenne, Huygens, Beeckman, Descartes, Bacon o el mismo Newton, cuando estudiaron y experimentaron con esos sonidos armónicos, revolucionando con ello las teorías de las consonancias y disonancias musicales. La Historia del S.XVII está llena de interacciones entra la Música y la Física.

La cantidad de armónicos de un sonido determina, entre otras cosas, lo que se conoce en música como **timbre**, que no es otra cosa que la característica del sonido que nos permite diferenciar unos instrumentos musicales de otros. Representar el modo en que las amplitudes *An* de los sucesivos armónicos van disminuyendo a medida que *n* crece es una buena forma de representar matemáticamente el timbre de un sonido. Es lo que se conoce como un análisis de Fourier:



Pensando en notas musicales, podemos representar en un pentagrama las notas que coinciden en frecuencia con los armónicos de un sonido fundamental del que partimos. Lo que ocurre es que no todos los armónicos van a coincidir exactamente con notas musicales. Es más, depende de la definición de "notas musicales" que utilicemos. Precisamente esa es nuestra meta en este artículo, llegar a establecer una escala musical que utilice las relaciones de frecuencias que surgen entre los sonidos armónicos.

He aquí los 16 primeros armónicos del *Do*2 (la cuerda más grave de un violonchelo):

Las flechas se refieren a que las frecuencias de las notas correspondientes son distintas si las comparamos con el sistema de afinación temperado, el estándar de afinación usado hoy en día para la mayor parte de los instrumentos de afinación fija (en la teoría, ya que en la práctica es necesario recurrir a otros sistemas de afinación). Por ejemplo, el 7º armónico de un *Do*4 es un sonido un poco más grave que el *Sib*4.

2.- **Los intervalos en la serie armónica:**

Las relaciones entre los números de los armónicos son también las relaciones entre sus frecuencias (recordemos que *n* es la frecuencia de la función seno en la fórmula de Fourier). Podemos ordenar estas relaciones según la serie numérica más sencilla entre números racionales: 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5:

$$\frac{2}{1}=\frac{f(Do_3)}{f(Do_2)} \quad \text{Intervalo de } 8^{a} \text{ Justa } (6 \text{ tonos})$$

$$\frac{3}{2}=\frac{f(Sol_3)}{f(Do_3)} \quad \text{Intervalo de } 5^{a} \text{ Justa } (3 \text{ tonos y medio})$$

$$\frac{4}{3}=\frac{f(Do_4)}{f(Sol_3)} \quad \text{Intervalo de } 4^{a} \text{ Justa } (2 \text{ tonos y medio})$$

$$\frac{5}{4}=\frac{f(Mi_4)}{f(Do_4)} \quad \text{Intervalo de } 3^{a} \text{ Mayor } (2 \text{ tonos})$$

$$\frac{6}{5}=\frac{f(Sol_4)}{f(Mi_4)} \quad \text{Intervalo de } 3^{a} \text{ menor } (1 \text{ tono y medio})$$

Ese fue uno de los puntos de partida de Pitágoras y los suyos. Su creencia en el "senario", los 6 primeros números naturales, y en la simplicidad de las leyes que rigen la Naturaleza les llevó a usar estas relaciones. En realidad los pitagóricos iban más lejos al afirmar que los astros celestes viajaban a velocidades cuyas proporciones entre sí eran precisamente éstas, de modo que en su roce con la sustancia que los sustentaba deberían de producir un sonido armónico. ¿Cómo es entonces que no escuchamos este sonido? Bueno, la forma de resolver este pequeño problema fue sencilla: este sonido ha existido siempre, por eso no somos conscientes de que lo percibimos, pero todavía está ahí. Esto pensaban los pitagóricos y su pensamiento fue el origen de la teoría musical occidental que se desarrolló desde el final de la Edad Media.

La llamada **escala de los Físicos** o de los armónicos es una mejora de la escala pitagórica. La escala pitagórica se obtiene a partir de las relaciones de 8ª(2/1) y de 5ª(3/2). Sumando quintas (multiplicando por 3/2) y restando octavas (multiplicando por 1/2) se pueden obtener todas las relaciones entre los grados de la escala. El resultado es un poco complicado: una tercera mayor entre el grado I y III de 81/64, un "semitono diatónico pitagórico" de 256/243, etc. Si se utilizan las relaciones de frecuencia que van apareciendo entre los armónicos, como hicimos más arriba, las relaciones resultan mucho más sencillas:

$$\frac{f(Re_5)}{f(Do_5)} = \frac{9}{8} \rightarrow 2^{a}\ Mayor\ (1\ Tono)$$

$$\frac{f(Mi_4)}{f(Sol_3)} = \frac{5}{3} \rightarrow 6^{a}\ Mayor\ (4\ Tonos\ y\ medio)$$

$$\frac{f(Do_5)}{f(Mi_4)} = \frac{8}{5} \rightarrow 6^{a}\ menor\ (4\ Tonos)$$

$$\frac{f(Sib_4)}{f(Do_4)} = \frac{7}{4} \rightarrow 7^{a}\ menor\ (5\ Tonos)\ un\ poco\ cerrada$$

$$\frac{f(Si_5)}{f(Do_5)} = \frac{15}{8} \rightarrow 7^{a}\ Mayor\ (5\ Tonos\ y\ medio)$$

Ordenando las notas a partir del Do tenemos las relaciones para una escala de Do Mayor diatónica:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Estas relaciones son válidas si partimos de cualquier otra nota.

El armónico 7 es especialmente interesante porque permitió incluir el número 7 en las relaciones interválicas simples, cosa que los griegos rechazaban. Permitió con ello, en pleno siglo XVIII, justificar matemáticamente el uso de un acorde importantísimo para toda la música del Barroco, el de 7ª menor: Do - Mi - Sol - Sib (armónicos 4-5-6-7). De todos modos siguió sin explicar porqué un intervalos de razón 8/5 (la 6ª menor) era considerado más consonante que uno de razón más 7/4 (la 7ªmenor). La fundamentación matemática de las consonancias y las disonancias fue uno de los puntos clave en el desarrollo de los distintos sistemas de afinación.

3.- **Comparación con el sistema de afinación temperado:**

Para empezar, el sistema de afinación temperado divide a la octava en 12 semitonos exactamente iguales.

De la escala que se pueda obtener a partir de la serie armónica resultan intervalos "desafinados" con respecto al estándar temperado. La 3ª Mayor de 5/4 resulta más pequeña que la propia del sistema temperado. La 3ª menor de 6/5, por el contrario, resulta más grande. De ahí que para lograr una buena afinación armónica en un instrumento de afinación variable sea necesario subir un poco las terceras menores y bajar un poco las terceras mayores. Con las sextas, intervalos complementarios, sucede justo al contrario. Las quintas justas de 3/2 también resultan ser más grandes que las quintas justas temperadas.

El Sib (la 7ª menor desde la fundamental) queda demasiado bajo en este sistema de afinación ("bajo" con respecto al sistema temperado). Sin embargo así de bajo es como se utiliza para conseguir una buena afinación en conjunto. Un pequeño grupo vocal o un cuarteto de cuerdas que quieran conseguir una afinación que busque el máximo de resonancia deberían utilizar esta 7ª menor un poco baja. Otros sistemas de afinación históricos optaron por otras séptimas menores que también son deducibles de la serie armónica: el sistema de afinación pitagórico llegó a una 7ª m de 16/9, mientras que el sistema de afinación justo optó por la 7ª m de 9/5, ambos más cercanos a la 7ª m temperada.

Para terminar, una forma interesante de comparar estos intervalos es mediante la definición de una interesanta unidad, el **cent**, que divide al semitono temperado en 100 partes exactamente iguales, es decir, divide a la octava (12 semitonos) en 1200 partes iguales:

Intervalo:	8ªJ	5ªJ	4ªJ	3ªM	3ªm	6ªM	6ªm	2ªM	7ªm	7ªM
Razón:	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	5/3	8/5	9/8	7/4	15/8
Cents	1200	702	498	386	315	884	814	204	969	1088
Cents temperados:	1200	700	500	400	300	900	800	200	1000	1100

4.- **Consecuencias para la afinación de un conjunto:**

¿Por qué es interesante encontrar una buena afinación armónica? En un conjunto de instrumentos o voces, cada sonido por separado está emitiendo un sonido fundamental más toda su serie de armónicos. Es decir, se están superponiendo los armónicos de unos instrumentos con los de otros. Si buscamos que las relaciones entre esas fundamentales sean las que nos da la serie armónica, existirá más coincidencia entre los armónicos de los distintos instrumentos y el sonido conjunto tenderá a reforzarse, creando una sensación de resonancia especial. Por el contrario, si cada individuo por separado emplea la afinación temperada, las pequeñas diferencias entre los armónicos de los distintos instrumentos producirán interferencias "molestas" (batidos) que no reforzarán el sonido conjunto. Es más, si cada instrumento por separado está exactamente afinado según el estándar temperado, la sensación del conjunto será más bien de una afinación muy imprecisa e inexacta.

El efecto se nota especialmente en conjuntos pequeños y homogéneos en cuanto a instrumentos: un quinteto de metales, un cuarteto de cuerda, un consort de gambas, un pequeño grupo de voces cantando polifonía del Renacimiento...Por supuesto que depende también de la resonancia que cree el espacio acústico donde se interprete la música. Las reflexiones de las ondas sonoras en los límites de dicho espacio mezclan el sonido individual de los instrumentos individuales para crear un todo. De ahí la importancia del concierto en vivo y en el espacio adecuado.

En el fondo detrás de estas explicaciones acústicas está todo un pensamiento estético. Por ejemplo, por comparar extremos, pensemos en cuál podía ser la concepción sonora que buscaba un pequeño fragmento contrapuntístico a dos voces de Josquin Desprez (1440-1521), en pleno Renacimiento, o el clímax sonoro de una de las sinfonías de Anton Bruckner (1824-1896), en pleno Romanticismo.

Espero que después de la lectura de este texto cualquier intérprete o estudiante de música saque dos conclusiones: una, la importancia del estudio de la afinación en conjunto, no individual, con mucha lentitud y paciencia, ya que no es del todo cierto que si cada instrumentista afina bien por separado el conjunto necesariamente suena afinado; dos, la importancia del estudio de la estética y el pensamiento de cada época histórica.

Benito Buide